Warnhinweis

Bei diesen „Lösungen“ handelt es sich um Lösungsskizzen, Ansätze und Endergebnisse. Die „Lösungen“ können nicht als Muster für Klausur-Lösungen angesehen werden. Außerdem wurden die „Lösungen“ nicht noch einmal auf ihre Richtigkeit kontrolliert und können Fehler enthalten.

Diese „Lösungen“ dienen lediglich zum Abgleich eurer Ergebnisse. Wenn ihr unsicher seid, fragt lieber noch einmal nach.

VEKTORRÄUME, TEILRÄUME UND LINEARE (UN-)ABHÄNGIGKEIT
LÖSUNG

Aufgabe 1.

Voraussetzung: Sei $M := \{(1,1,4), (-2,0,3), (5,1,-2)\}$.

Behauptung: Die Vektoren $(2,0,-3)$, $(-1,1,7)$ und $(-5,-3,-9)$ sind als $\mathbb{R}$-Linearkombinationen in M darstellbar, $(3,1,-1)$ dagegen nicht. $(2,0,-3)$, $(-1,1,7)$ und $(-5,-3,-9)$ lassen sich auch auf unterschiedliche Weisen darstellen; M müsste linear unabhängig gemacht werden, damit es eindeutig ist. (Beispielsweise $(5,1,-2)$ aus M entfernen).

Beweis:

Es ist:
$$(2,0,-3) = -(-2,0,3),$$
$$(-1,1,7) = (1,1,4) + (-2,0,3) \quad \text{und}$$
$$(-5,-3,-9) = -3(1,1,4) + (-2,0,3).$$

Weiterhin ist auch:
$$(1,1,4) - 3(-2,0,3) - (5,1,-2) = (2,0,-3),$$
$$3(-2,0,3) + (5,1,-2) = (-1,1,7),$$
$$(1,1,4) - 7(-2,0,3) - 4(5,1,-2) = (-5,-3,-9).$$

Mit der VL wissen wir, dass für linear unabhängige Mengen M' gilt, dass Vektoren aus $\langle M' \rangle_{\mathbb{R}}$ nur auf genau eine Weise darstellbar sind.

Da $(5,1,-2) = (1,1,4) - 2(-2,0,3)$ gilt, ist M linear abhängig.
Die Menge $\{(1,1,4), (-2,0,3)\}$ ist linear unabhängig, da:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $x(1,1,4) + y(-2,0,3) = (0,0,0)$ gilt.
Dann ist:
$$x - 2y = 0,$$
$$x = 0,$$
$$4x + 3y = 0$$
Also ist $x = y = 0$ die einzige Möglichkeit, den Nullvektor darzustellen.

Angenommen $(3,1,-1)$ ist als $\mathbb{R}$-Linearkombination in M darstellbar.
Seien dann $x, y, z \in \mathbb{R}$ so, dass $x(1,1,4) + y(-2,0,3) + z(5,1,-2) = (3,1,-1)$ gilt. Dann ist:
$$x - 2y + 5z = 3,$$
$$x + z = 1,$$
$$\text{III}: 4x + 3y - 2z = -1.$$
Aus der zweiten Gleichung folgt: $x = 1 - z$, das in die 1. Gl. eingesetzt, ergibt: $(1-z) - 2y + 5z = 3$, also: $-2y = 2 - 4z \Leftrightarrow y = -1 + 2z$.
x und y eingesetzt in III ergibt: $4(1-z) + 3(-1+2z) - 2z = -1$
$\Leftrightarrow 4 - 4z - 3 + 6z - 2z = 1 = -1$ ↯. $1 = -1$ ist ein Widerspruch, also ex. x, y, z wie gewählt nicht, die Annahme ist falsch und es folgt die Behauptung.

Aufgabe 2:

Voraussetzung: Es seien $M_1 := \{(a,0,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, $M_2 := \{(x,0,0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, x+y=0\}$, $M_3 := \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, abcd=1\}$, und $M_4 := \{(0,1,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Behauptung: a) M_1 ist ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^4$.
b) M_2 ist ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^4$.
c) M_3 ist kein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^4$.
d) M_4 ist kein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^4$.

Beweis: Es sind M_1, M_2, M_3, M_4 Teilmengen von $\mathbb{R}^4$.

a) Da $0 \in \mathbb{R}$ ist, ist $(0,0,0,0) \in M_1$. Seien nun $(a,0,b,0)$, $(c,0,d,0) \in M_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$(a,0,b,0) + (-(c,0,d,0)) = (a-c, 0, b-d, 0) \in M_1$, da $\mathbb{R}$ bezüglich Addition eine Gruppe ist. (dadurch ist $a-c, b-d \in \mathbb{R}$)
Weiterhin ist: $\lambda \cdot (a,0,b,0) = (\lambda a, 0, \lambda b, 0) \in M_1$, da $\mathbb{R}$ bezüglich Multiplikation abgeschlossen ist. Mit dem Teilraumkriterium folgt: $M_1 \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$.

b) Es ist $0 \in \mathbb{R}$ und $0+0=0$, sodass $(0,0,0,0) \in M_2$ gilt.
Seien $(a,0,0,b)$, $(c,0,0,d) \in M_2$. Dann ist $a-c, b-d \in \mathbb{R}$ und es gilt: $(a+b) + (-(c+d)) \underset{-0=0}{=} 0+0 \underset{\text{Kommutativität bzgl. } +}{=} (a-c) + (b-d)$.
Also ist $(a,0,0,b) + (-(c,0,0,d)) = (a-c, 0, 0, b-d) \in M_2$.
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\lambda \cdot a, \lambda b \in \mathbb{R}$ und $\lambda(a+b) \underset{\lambda \cdot 0 = 0}{=} 0 = \lambda a + \lambda b$,
sodass folgt: $\lambda(a,0,0,b) = (\lambda a, 0, 0, \lambda b) \in M_2$ und damit $M_2 \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$.

c) Da $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \neq 1$ ist, ist $0_{\mathbb{R}^4} \notin M_3$, sodass $M_3 \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$.

d) Seien $(0,1,x,0), (0,1,y,0) \in M_4$. Dann gilt:
$(0,1,x,0) + (-(0,1,y,0)) = (0, 1-1, x-y, 0) = (0,0,x-y,0) \notin M_4$.
($0_{\mathbb{R}^4}$ ist ebenfalls nicht in M_4 enthalten). Also gilt: $M_4 \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3:

Behauptung: a) $\{(1,2,0,0), (0,2,3,0), (0,0,3,4)\}$ ist lin. unabh. über $\mathbb{R}$.
b) $\{(-1,2,0,0), (1,1,0,1), (1,0,3,3)\}$ ist lin. unabh. über $\mathbb{R}$
und $\{(-1,2,0,0), (1,0,3,3), (-2,0,3,1)\}$ ebenso.
c) $\{(1,-2,0), (1,1,-1), (0,1,1)\}$ ist lin. unabh. über $\mathbb{R}$.
d) $\{(-3,0,1,0), (-1,0,0,1), (-2,0,1,-1)\}$ ist lin. abh. über $\mathbb{R}$.

Beweis:

a) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ so, dass $a(1,2,0,0) + b(0,2,3,0) + c(0,0,3,4) = (0,0,0,0)$ gilt. Dann ist:

$\mathrm{I} := a = 0,$ sodass mit I in II
$\mathrm{II} := 2a + 2b = 0,$
$\mathrm{III} := 3b + 3c = 0,$
$\mathrm{IV} := 4c = 0,$

$b = 0$, das dann in III $c = 0$ ergibt, und damit ist $0_{\mathbb{R}^4}$ nur als triviale Linearkombination in $\{(1,2,0,0), (0,2,3,0), (0,0,3,4)\}$ darstellbar, sodass die Behauptung a) folgt.

b) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ sodass $a(-1,2,0,0)+b(1,1,0,1)+c(1,0,3,3)=0_{\mathbb{R}^4}$ gilt. Dann ist
$$-a+b+c=0,$$
$$2a+b=0,$$
$$3c=0 \text{ und}$$
$$b+3c=0$$
Mit $3c=0$ folgt $c=0$, damit: $b+3\cdot 0=0$, also $b=0$, sodass $2a+0=0$: $a=0$ ergibt, also ist der Nullvektor nur als triviale Linearkombination in $M:=\{(-1,2,0,0),(1,1,0,1),(1,0,3,3)\}$ darstellbar, sodass M lin. unabh. über $\mathbb{R}$ ist.

Seien nun $x,y,z \in \mathbb{R}$ sodass $x(-1,2,0,0)+y(1,0,3,3)+z(-2,0,3,1)=0_{\mathbb{R}^4}$ gilt. Dann ist:
$$I := -x+y-2z=0,$$
$$II := 2x=0,$$
$$III := 3y+3z=0$$
$$IV := 3y+z=0$$
Mit IV ist $z=-3y$. II ergibt: $x=0$, III ergibt mit $z=-3y$ eingesetzt: $3y+3(-3y)=-6y=0$, also $y=0$ und mit $z=-3y$ folgt $z=0$, also ist $\{(-1,2,0,0),(1,0,3,3),(-2,0,3,1)\}$ linear unabh. über $\mathbb{R}$.

c) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ sodass $a(1,-2,0)+b(1,1,-1)+c(0,1,1)=0_{\mathbb{R}^3}$ gilt. Dann ist:
$$I := a+b=0,$$
$$II := -2a+b+c=0$$
$$III := -b+c=0.$$
Aus III folgt $b=c$, mit I erhalten wir $a=-b$. Beides in II eingesetzt, ergibt: $-2(-b)+b+b=4b=0$, also $b=0$, damit ist: $a=-b=0$ und $c=0$, also ist $\{(1,-2,0),(1,1,-1),(0,1,1)\}$ linear unabh. über $\mathbb{R}$.

d) Es ist: $(-2,0,1,-1)=(-3,0,1,0)-(-1,0,0,1)$, weshalb $\{(-3,0,1,0),(-1,0,0,1),(-2,0,1,-1)\}$ lin. abh. über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4:

Voraussetzung: Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$.

Behauptung: a) Im Allgemeinen ist nicht jede K-linear unabh. Menge von Vektoren aus V auch ein K-Erz.system für V.
b) Alle K-Erzeugnisse in V sind linear abhängig über K.
c) Falls $\langle M\rangle_K = V$ ist und $M \subset A \subset V$ gilt, dann ist auch $\langle A\rangle_K = V$.
d) Es ist $(1,-2,1) \in \langle(1,-1,0),(2,-1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$.
e) Es ist $(5,1,-2) \in \langle(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\rangle_{\mathbb{R}}$.
d) Es ist $\{(2a,a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \notin \langle(1,-1,0),(2,-1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$.

Beweis:

a) Es ist $\mathbb{R}$ ein Körper, $\mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{(1,1,4),(-2,0,3)\}$ eine $\mathbb{R}$-linear unabhängige Menge, wie wir in Aufgabe 1 gesehen haben, jedoch ist $|\{(1,1,4),(-2,0,3)\}|=2$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3 \neq 2$, sodass mit der VL folgt, dass $\{(1,1,4),(-2,0,3)\}$ $\mathbb{R}^3$ nicht erzeugen kann, also kein $\mathbb{R}$-Erz.system für $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Sei $T \subseteq V$. Da $\langle T\rangle_K \leq_K V$ nach Definition gilt, gelten alle Eigenschaften des Teilraumkriteriums für $\langle T\rangle_K$, also auch: Sei $v \in \langle T\rangle_K$ und $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. (geht so zu wählen, da Körper mind. 2 El. besitzen) Dann ist auch $\lambda v \in \langle T\rangle_K$.
Damit gilt nun: $\lambda\cdot(v)+(-1)\cdot(\lambda v)=0_V$, sodass $\langle T\rangle_K$ lin. abh. ist über K, da es in K-Erz. also immer eine nicht-triviale K-Linearkomb. gibt um den Nullvektor darzustellen.

c) Es gelte $\langle M \rangle_K = V$ und sei $M \subseteq A \subseteq V$. Sei $v \in V$.
Dann ex. $n \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ so, dass
$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ gilt. Da $m_1, \dots, m_n \in M$ ist, gilt insbesondere
wegen $M \subseteq A$ auch $m_1, \dots, m_n \in A$, sodass also auch alle
$v \in V$ in A darstellbar sind. Hieraus folgt $\langle A \rangle_K = V$.

d) Es ist $(1,-2,1) = 3(1,-1,0) - (2,-1,-1)$.

e) Es ist $4(1,1,0) - 3(0,1,1) + (1,0,1) = (5,1,-2)$

f) Angenommen $(2,1,1) \in \langle (1,-1,0), (2,-1,-1) \rangle$. Seien dann
$x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $(2,1,1) = x(1,-1,0) + y(2,-1,-1)$ gilt. Dann
ist: $\mathrm{I} := 2 = x + 2y$, Aus III folgt $y = -1$, das in II:

$\mathrm{II} := 1 = -x - y$,

$\mathrm{III} := 1 = -y$,

$1 = -x \overset{+}{-} 1$, also $x = \overset{0}{-}2$, das in I: $2 = -2 + 2(-1) = -4$ ↯. Das
ist ein Widerspruch, also war die Annahme falsch, damit
folgt $(2,1,1) \notin \langle (1,-1,0), (2,-1,-1) \rangle$, also auch $\{(2a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\not\subseteq \langle (1,-1,0), (2,-1,-1) \rangle_{\mathbb{R}}$, da $(2,1,1) \in \{(2a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist.

Lösungen zu Erzeugnis, Basis u. Dimension

1. Aufgabe

$$\langle (1,2,3),(-1,-1,2)\rangle_{\mathbb{R}} = \{x\cdot(1,2,3)+y\cdot(-1,-1,2) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x-y,\ 2x-y,\ 3x+2y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x-y,\ 2x-y,\ (x-y)+(2x-y)) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(a,\ b,\ a+b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

$$\langle (1,1,0),(2,1,1)\rangle_{\mathbb{R}} = \{x\cdot(1,1,0)+y\cdot(2,1,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x+2y,\ x+y,\ y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x+y+y,\ x+y,\ y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(b+c,\ b,\ c) \mid b,c\in\mathbb{R}\}$$

$$\langle (1,1,4),(0,1,2)\rangle_{\mathbb{R}} = \{x\cdot(1,1,4)+y\cdot(0,1,2) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,\ x+y,\ 4x+2y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,\ x+y,\ 2\cdot x+2\cdot(x+y)) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(a,\ b,\ 2\cdot a+2\cdot b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

$$\langle (1,3,1),(1,1,-1)\rangle_{\mathbb{R}} = \{x\cdot(1,3,1)+y\cdot(1,1,-1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x+y,\ 3x+y,\ x-y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x+y,\ 2\cdot(x+y)+(x-y),\ x-y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(a,\ 2a+c,\ c) \mid a,c\in\mathbb{R}\}$$

$$\langle (1,2,3),(-3,-6,-9)\rangle_{\mathbb{R}} \underset{\uparrow}{=} \langle (1,2,3)\rangle_{\mathbb{R}} = \{(a,2a,3a) \mid a\in\mathbb{R}\}$$

da $(-3,-6,-9) = 3\cdot(1,2,3)$

2. Aufgabe

a) Es ist $U = \{(a,2a,b,a-b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$$= \{a\cdot(1,2,0,1)+b\cdot(0,0,1,-1) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,2,0,1),(0,0,1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$$

Somit ist $A := \{(1,2,0,1),(0,0,1,-1)\}$ ein $\mathbb{R}$-Erzeugendensystem von U.

A ist linear unabh. über $\mathbb{R}$, was sich schnell nachrechnen lässt.

Somit ist A eine $\mathbb{R}$-Basis von U und es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$.

b) Offensichtlich liegen die Vektoren $(2,1,0,7),(3,4,-8,5),(3,4,1,-1)$ im Erzeugnis. Außerdem liegen z. B. die Vektoren $2\cdot(2,1,0,7)=(4,2,0,14)$ und $(2,1,0,7)+(3,4,-8,5)=(5,5,-8,12)$ im Erzeugnis.

c) Die Vektoren $(2,1,0,6),(4,2,0,13)$ und $(5,5,-8,1)$ liegen nicht im geg. Erzeugnis, da sich nicht als LK in der Menge $\{(2,1,0,7),(3,4,-8,5),(3,4,1,-1)\}$ darstellbar sind.

3. Aufgabe

a) Es gilt $(-6,-2,2,5)=2\cdot(-3,0,1,2)+0\cdot(0,0,1,1)+(-1)\cdot(0,2,0,-1)$.

Nach gr. Austauschsatz kann $(-6,-2,2,5)$ mit den Vektoren $(-3,0,1,2)$ und $(0,2,0,-1)$ ausgetauscht werden, aber nicht mit $(0,0,1,1)$. Somit ist $(M\setminus\{(-3,0,1,2)\})\cup\{(-6,-2,2,5)\}$ eine $\mathbb{R}$-lin. unabhängige Menge.

b) Seien $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$a\cdot(-3,0,1,2)+b\cdot(-3,0,0,1)+c\cdot(0,0,1,0)+d\cdot(0,2,1,-1)=(0,0,0,0)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} -3a-3b &= 0\\ 2d &= 0\\ a+c+d &= 0\\ 2a+b-d &= 0 \end{aligned}$$

Aus der 2. Gl. folgt $d=0$.
Aus der 4. Gl. folgt dann $b=-2a$.
Aus der 1. Gl. folgt dann $-3a+6a=0$, also $a=0$ und somit auch $b=0$.
Aus der 3. Gl. folgt dann $c=0$.

Somit ist B linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Außerdem hat B 4 Elemente und die $\mathbb{R}$-Dimension von $\mathbb{R}^4$ ist 4. Also ist B eine $\mathbb{R}$-Basis für $\mathbb{R}^4$.

c) Es gilt $(0,0,1,1)=(-3,0,1,2)+(-1)\cdot(-3,0,0,1)$. Somit kann $(0,0,1,1)$ gegen $(-3,0,0,1)$ ausgetauscht werden und $\{(-3,0,1,2),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(0,2,1,-1)\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis.

Weiter gilt $(0,2,0,-1)=(-1)\cdot(0,0,1,0)+(0,2,1,-1)$. Somit kann $(0,2,0,-1)$ gegen $(0,0,1,0)$ getauscht werden. Somit ist

$\{(-3,0,1,2),(0,0,1,1),(0,2,0,-1),(0,2,1,-1)\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^4$.

4. Aufgabe

Es sei V ein K-Vektorraum und $u, w \in V$.

a) z. z.: Ist $v \in \langle u,w \rangle_K$, dann gilt $\langle u,w,v \rangle_K = \langle u,w \rangle_K$

Bew.: Sei $v \in \langle u,w \rangle_K$. Dann ex. $a, b \in K$ so, dass $v = a \cdot u + b \cdot w$ gilt.

„$\subseteq$" Sei $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot v \in \langle u,w,v \rangle_K$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot v &= \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot (a \cdot u + b \cdot w) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3 \cdot a) \cdot u + (\lambda_2 + \lambda_3 \cdot b) \cdot w \\ &\in \langle u,w \rangle_K\end{aligned}$$

Also ist $\langle u,w,v \rangle_K \subseteq \langle u,w \rangle_K$

„$\supseteq$" Da $\{u,w\} \subseteq \{u,w,v\}$ gilt schon $\langle u,w \rangle_K \subseteq \langle u,w,v \rangle_K$

b) Es gilt $(1,2,-1) = -(1,1,1) + (2,3,0)$. Also ist nach a)

$$\langle (1,1,1),(2,3,0),(1,2,-1) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (1,1,1),(2,3,0) \rangle_{\mathbb{R}}$$

c) Es gilt $(4,1,0,1) - (2,0,1,-1) = (2,1,-1,2)$. Somit ist

$$\langle (4,1,0,1),(2,0,1,-1),(2,1,-1,2),(6,2,0,2) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (4,1,0,1),(2,0,1,-1),(6,2,0,2) \rangle_{\mathbb{R}}$$

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$a \cdot (4,1,0,1) + b \cdot (2,0,1,-1) + c \cdot (6,2,0,2) = (0,0,0,0)$$

$$\vdots$$

Also ist $a = b = c = 0$ und $\{(4,1,0,1),(2,0,1,-1),(6,2,0,2)\}$ ist ein linear unabhängiges $\mathbb{R}$-Erzeugendensystem, also eine Basis.

Also ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle (4,1,0,1),(2,0,1,-1),(2,1,-1,2),(6,2,0,2) \rangle = 3$$

1. Aufgabe

a) (i) kein Homomorphismus, denn
$(2v_1, 2v_2)^{\varphi_1} = (2(v_1+v_2), -4v_1^2) \neq 2\cdot(v_1+v_2, -v_1^2) = 2(v_1, v_2)^{\varphi_1}$

(ii) Homomorphismus, denn
$(av_1+bw_1, av_2+bw_2)^{\varphi_2} = (av_2+bw_2)\cdot(x^2+3x) + (av_1+bw_1) = a[v_2(x^2+3x)+v_1] + b[w_2(x^2+3x)+w_1]$
$= a(v_1, v_2)^{\varphi_2} + b(w_1, w_2)^{\varphi_2}$

(iii) Homomorphismus, denn
$(av_1+bw_1, av_2+bw_2)^{\varphi_3} = 4\cdot[(av_1+bw_1)-3(av_2+bw_2)] = a\cdot 4(v_1-3v_2) + b\cdot 4(w_1-3w_2) = a(v_1, v_2)^{\varphi_3} + b(w_1, w_2)^{\varphi_3}$

(iv) Homomorphismus, denn
$(av_1+bw_1, av_2+bw_2, av_3+bw_3)^{\varphi_4} = (av_2+bw_2+4(av_3+bw_3), av_1+bw_1-3(av_3+bw_3))$
$= a(v_2+4v_3, v_1-3v_3) + b(w_2+4w_3, w_1-3w_3) = a(v_1, v_2, v_3)^{\varphi_4} + b(w_1, w_2, w_3)^{\varphi_4}$

(v) Homomorphismus, denn
$(av_1+bw_1, av_2+bw_2)^{\varphi_5} = (4(av_1+bw_1)+3(av_2+bw_2), av_1+bw_1) = a(4v_1+3v_2, v_1) + b(4w_1+3w_2, w_1) = a(v_1, v_2)^{\varphi_5} + b(w_1, w_2)^{\varphi_5}$

b) (ii) Für Elemente aus dem Kern gilt
$(v_1, v_2)^{\varphi_2} = v_2(x^2+3x)+v_1 \overset{!}{=} 0$
$\Rightarrow v_1 = v_2 = 0$
$\Rightarrow \mathrm{Kern}\,\varphi_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}\,\varphi_2 = 0$
Nach dem Dimensionssatz für Vektorraumhomomorphismen gilt:
$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_2 + \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}\,\varphi_2$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_2 = 2-0 = 2$

(iii) $\mathrm{Kern}\,\varphi_3 = \{(3v, v)\in\mathbb{R}^2 \mid v\in\mathbb{R}\}$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}\,\varphi_3 = 1$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_3 = 2-1 = 1$

(iv) $\mathrm{Kern}\,\varphi_4 = \{(3v, -4v, v)\in\mathbb{R}^3 \mid v\in\mathbb{R}\}$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}\,\varphi_4 = 1$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_4 = 3-1 = 2$

(v) $\mathrm{Kern}\,\varphi_5 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Kern}\,\varphi_5 = 0$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_5 = 2-0 = 2$

c) (ii) - $\mathrm{Kern}\,\varphi_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\Leftrightarrow$ φ_2 ist injektiv
- $\dim_{\mathbb{R}} V = 3 \neq 2 = \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_2$ $\Rightarrow$ φ_2 ist nicht surjektiv

(iii) - $\mathrm{Kern}\,\varphi_3 \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\Rightarrow$ φ_3 ist nicht injektiv
- $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1 = \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_3$ $\Rightarrow$ φ_3 ist surjektiv

(iv) - $\mathrm{Kern}\,\varphi_4 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ $\Rightarrow$ φ_4 ist nicht injektiv
- $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2 = \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Bild}\,\varphi_4$ $\Rightarrow$ φ_4 ist surjektiv

(v) - $\text{Kern}\,\varphi_S = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \iff \varphi_S$ ist injektiv $\iff \varphi_S$ ist surjektiv $\iff \varphi_S$ ist bijektiv
(Korollar 4.9 anwendbar, da Start- und Zielbereich identisch u. somit natürlich auch die Dimension)

2. Aufgabe

a) $(a,b,c,d)^{\tilde{\varphi}} = (ae_1+be_2+ce_3+de_4)^{\tilde{\varphi}} = ae_1^{\varphi} + be_2^{\varphi} + ce_3^{\varphi} + de_4^{\varphi} = a(1,1,0,0) + b(0,1,1,0) + c(0,0,1,1) + d(1,0,0,1)$
$= (a+d,\ a+b,\ b+c,\ c+d)$

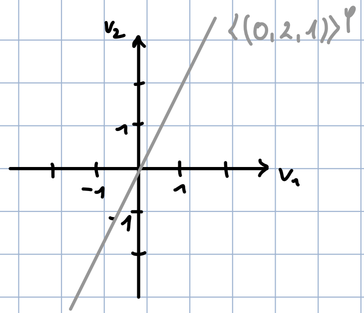
b) Es ist $\text{Bild}(\varphi) = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1)\}$.
Wegen $(1,1,0,0) - (0,1,1,0) + (0,0,1,1) - (1,0,0,1) = (0,0,0,0)$ sind die vier Vektoren von $\text{Bild}(\varphi)$ nicht linear unabhängig und können daher keine Basis vom $\mathbb{R}^4$ bilden.
Mit a) sieht man dann leicht, dass $(1,-1,1,-1) \in \text{Kern}\,\tilde{\varphi}$.
$\Rightarrow \text{Kern}(\tilde{\varphi}) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\} \Rightarrow \tilde{\varphi}$ ist nicht injektiv $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ist nicht bijektiv

3. Aufgabe

a) φ ist $\mathbb{R}$-linear, da
$(av_1+bw_1,\ av_2+bw_2,\ av_3+bw_3)^{\varphi} = (2(av_1+bw_1)+(av_3+bw_3),\ 2(av_1+bw_1)+(av_2+bw_2)) = a(2v_1+v_3,\ 2v_1+v_2) + b(2w_1+w_3,\ 2w_1+w_2)$
$= a(v_1,v_2,v_3)^{\varphi} + b(w_1,w_2,w_3)^{\varphi}$

b) $(0,2,1)^{\varphi} = (2\cdot 0+1,\ 2\cdot 0+2) = (1,2)$

Es ist: $\langle(0,2,1)\rangle^{\varphi} = \{(a, 2a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ $\Rightarrow$



c) $\text{Kern}\,\varphi = \{(v,-2v,-2v) \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R}\} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
$\Rightarrow \varphi$ ist nicht injektiv

$\dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}\,\varphi = 3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(\varphi) = 3 - 1 = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv

d) Es seien e_1, e_2, e_3 die Basisvektoren aus $\hat{B}_1$ und $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ aus $\hat{B}_2$.
$e_1^{\varphi} = (1,1,0)^{\varphi} = (2,3) = 3\cdot(-1,1) + 5\cdot(1,0) = 3\tilde{e}_1 + 5\tilde{e}_2$
$e_2^{\varphi} = (0,-1,1)^{\varphi} = (1,-1) = (-1)\cdot(-1,1) = (-1)\cdot\tilde{e}_1 + 0\cdot\tilde{e}_2$
$e_3^{\varphi} = (0,0,1)^{\varphi} = (1,0) = 0\cdot\tilde{e}_1 + 1\cdot\tilde{e}_2$
Die Einträge in der Darstellungsmatrix entsprechen dann den Koeffizienten vor den $\tilde{e}_i$.
$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Aufgabe

(i) ☐ Jede Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(1,\ 3)^\varphi = (0,\ 7) \quad \text{und} \quad (2,\ 6)^\varphi = (2,\ 8)$$

ist ein Vektorraumhomomorphismus.

(ii) ☐ Ist $\alpha : V \to W$ ein K-Epimorphismus, so ist α immer auch ein Isomorphismus.

(iii) ☑ Ist $\alpha : V \to W$ ein K-Epimorphismus, so gilt $\dim_K W \leq \dim_K V$.

(iv) ☑ Es seien $\alpha : U \to V$ und $\beta : V \to W$ mit $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$, dann gilt für alle $u \in U$: $u^{\alpha * \beta} = 0_W$.

(v) ☑ Gilt für $\alpha : V \to V$, dass $\text{Kern}(\alpha) = \{0_V\}$, so ist α ein Isomorphismus.

(vi) ☑ Ist $\alpha : V \to W$ surjektiv mit $\dim_K V \leq \dim_K W$, dann ist α auch bijektiv.

(i) Falsch.
Begründung: $2 \cdot (1,3)^\varphi = 2 \cdot (0,7) = (0,14) \neq (2,8) = (2,6)^\varphi = (2 \cdot 1, 2 \cdot 3)^\varphi$

(ii) Falsch.
Gegenbeispiel: Aufgabe 1, Abbildung (iii)

(iii) Richtig.
Im Allgemeinen gilt $\dim_K \text{Bild}(\alpha) \leq \dim_K V$. Ist α surjektiv, ist weiterhin $\dim_K \text{Bild}(\alpha) = \dim_K W$.
$\Rightarrow \dim_K W = \dim_K \text{Bild}(\alpha) \leq \dim_K V$

(iv) Richtig.
$\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta) \Rightarrow u^\alpha \in \text{Kern}(\beta)$
$u^{\alpha * \beta} = (u^\alpha)^\beta = 0_W$

(v) Richtig.
$\text{Kern}(\alpha) = \{0_V\} \Leftrightarrow \alpha$ ist injektiv $\overset{4.9}{\Leftrightarrow} \alpha$ ist bijektiv $\Leftrightarrow \alpha$ heißt Isomorphismus

(vi) Richtig.
$\dim_K W \overset{\text{Surjektivität}}{=} \dim_K \text{Bild}(\alpha) \leq \dim_K V \overset{\text{Voraussetzung}}{\leq} \dim_K W \Rightarrow \dim_K V = \dim_K W$
α ist surjektiv $\overset{4.9}{\Leftrightarrow} \alpha$ ist bijektiv

Direkte Summe, Lineare Fortsetzung, Abbildungsmatrizen

1. Aufgabe: (*Direkte Summe*)

Seien $K := \mathbb{R}$ und $V := M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Sei weiter $U_1 := \{A = (a_{ij}) \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \leq_K V$. Zeige, dass es einen K-Teilraum U_2 von V gibt so, dass $U_1 \oplus U_2 = V$ ist!

Lösung:

Voraussetzung: Seien $K := \mathbb{R}$ und $V := M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Seien weiter $U_1 := \{A = (a_{ij}) \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \leq_K V$ und $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V$.

Behauptung: Es ist $U_1 \oplus U_2 = V$.

Beweis: Mit dem Teilraumkriterium lässt sich zeigen, dass U_2 ein K-TR von V ist. Es ist

$$\begin{aligned} U_1 &= \{A = (a_{ij}) \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Sei nun $A \in V$ beliebig. Dann existieren $a, b, c, d, e, f \in K$ so, dass

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \\ e & f \end{pmatrix}}_{=:A_2 \in U_2} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A_1 \in U_1}$$

ist. Wir sehen also, dass für A schon $A_1 \in U_1$ und $A_2 \in U_2$ existieren so, dass $A = A_1 \oplus A_2$ ist. Angenommen es existieren $B_1 \in U_1$ und $B_2 \in U_2$ mit $B_1 \neq A_1, B_2 \neq A_2$ so, dass $A = B_1 \oplus B_2$ ist. Dann existieren $x, y, z, m, n, p \in K$ so, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = A = B_1 \oplus B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ x & p \\ y & z \end{pmatrix}$$

ist. Aus den Einträgen der Matrizen sehen wir nun, dass $m = a, n = b, x = c, p = d, y = e, z = f$ sind, und damit sind

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \\ e & f \end{pmatrix} = A_2 \text{ und } B_1 = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

im Widerspruch zu $B_1 \neq A_1, B_2 \neq A_2$. Somit existieren für alle $A \in V$ schon eindeutig bestimmte $A_1 \in U_1, A_2 \in U_2$ so, dass $A = A_1 \oplus A_2$ ist. Mit Lemma 3.20 (a) und (b) folgt nun schon, dass $V = U_1 \oplus U_2$ ist. (Alternativ: Summe zeigen und $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ zeigen.)

2. Aufgabe: (*Direkte Summe*)

Seien $K := \mathbb{R}$ und sei $V := \mathbb{R}^5$. Seien weiter $U_1 := \{(a,0,c,0,e) \in V \mid a-c-e=0\}$ und $U_2 := \langle\{(3,0,0,1,0),(0,0,2,0,-3),(-4,0,0,0,-2)\}\rangle_K$.

a) Berechne $\dim_K(U_1+U_2)$!

b) Ist U_1+U_2 eine direkte Summe? Beweise!

Sei nun $U_3 := \langle\{(1,0,0,0,0),(0,-3,0,0,0),(0,0,0,\frac{1}{2},0)\}\rangle_K$.

c) Zeige, dass $V = U_1 \oplus U_3$ ist!

d) Finde eine Basis B von U_1 und eine Basis C von U_3 so, dass $B \cup C$ eine Basis von V ist!

Lösung:

Voraussetzung: Seien $K := \mathbb{R}$ und sei $V := \mathbb{R}^5$. Seien weiter $U_1 := \{(a,0,c,0,e) \in V \mid a-c-e=0\}$, $U_2 := \langle\{(3,0,0,1,0),(0,0,2,0,-3),(-4,0,0,0,-2)\}\rangle_K$ und $U_3 := \langle\{(1,0,0,0,0),(0,-3,0,0,0),(0,0,0,\frac{1}{2},0)\}\rangle_K$.

a) *Behauptung:* Es ist $\dim_K(U_1+U_2) = 4$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}U_2 &= \langle\{(3,0,0,1,0),(0,0,2,0,-3),(-4,0,0,0,-2)\}\rangle_K \\ &= \{a\cdot(3,0,0,1,0)+b\cdot(0,0,2,0,-3)+c\cdot(-4,0,0,0,-2) \mid a,b,c \in K\} \\ &= \{(3a-4c,0,2b,a,-3b-2c) \mid a,b,c \in K\}.\end{aligned}$$

Weiter ist nun

$$\begin{aligned}U_1 \cap U_2 &= \{(a,0,c,0,e) \in V \mid a-c-e=0\} \cap \{(3a-4c,0,2b,a,-3b-2c) \mid a,b,c \in K\} \\ &= \{(3a-4c,0,2b,a,-3b-2c) \mid a,b,c \in K, a=0, 3a-4c-2b+3b+2c=0\} \\ &= \{(-4c,0,2b,0,-3b-2c) \mid b,c \in K, -2c+b=0\} \\ &= \{(-4c,0,2b,0,-3b-2c) \mid b,c \in K, b=2c\} \\ &= \{(-4c,0,4c,0,-6c-2c) \mid c \in K,\} \\ &= \{(-4c,0,4c,0,-8c) \mid c \in K\} \\ &= \{c\cdot(-4,0,4,0,-8) \mid c \in K\} \\ &= \{c\cdot(-1,0,1,0,-2) \mid c \in K\} \\ &= \langle\{(-1,0,1,0,-2)\}\rangle_K.\end{aligned}$$

Es ist $\{(-1,0,1,0,-2)\}$ linear unabhängig, also ist $\{(-1,0,1,0,-2)\}$ eine K-Basis von $U_1 \cap U_2$ und es ist $\dim_K(U_1 \cap U_2) = |\{(-1,0,1,0,-2)\}| = 1$. Weiter ist

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(a,0,c,0,e) \in V \mid a-c-e=0\} \\ &= \{(a,0,c,0,e) \in V \mid a=c+e\} \\ &= \{(c+e,0,c,0,e) \mid c,e \in K\} \\ &= \{c\cdot(1,0,1,0,0)+e\cdot(1,0,0,0,1) \mid c,e \in K\} \\ &= \langle\{(1,0,1,0,0),(1,0,0,0,1)\}\rangle_K.\end{aligned}$$

Es ist auch $\{(1,0,1,0,0),(1,0,0,0,1)\}$ linear unabhängig, also eine K-Basis für U_1 und damit ist $\dim_K(U_1) = |\{(1,0,1,0,0),(1,0,0,0,1)\}| = 2$. Weiterhin ist auch $\{(3,0,0,1,0),(0,0,2,0,-3),(-4,0,0,0,-2)\}$ linear unabhängig, also eine K-Basis für U_2 und damit ist $\dim_K(U_2) = |\{(3,0,0,1,0),(0,0,2,0,-3),(-4,0,0,0,-2)\}| = 3$. Mit Satz 3.18 ist nun

$$4 = 2+3-1 = \dim_K(U_1)+\dim_K(U_2)-\dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K(U_1+U_2)$$

und das ist insgesamt die Behauptung.

b) *Behauptung:* $U_1 + U_2$ ist keine direkte Summe.
Beweis: Angenommen $U_1 + U_2$ ist eine direkte Summe. Wäre $U_1 + U_2$ eine direkte Summe, dann wäre $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$. Dann wäre $\dim_K(U_1 \cap U_2) = 0$. In a) haben wir aber gezeigt, dass $\dim_K(U_1 \cap U_2) = 2$ ist und das ist ein Widerspruch. Also ist $U_1 + U_2$ keine direkte Summe.

c) *Behauptung:* Es ist $V = U_1 \oplus U_3$.
Beweis: Es ist klar, dass $U_1 + U_3 \subseteq V$ ist. Es sei $(a, b, c, d, e) \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}(a, b, c, d, e) = &\underbrace{c \cdot (1, 0, 1, 0, 0) + e \cdot (1, 0, 0, 0, 1)}_{=:u_1 \in U_1} + \\ &\underbrace{(a - c) \cdot (1, 0, 0, 0, 0) + \left(-\frac{1}{3}\right) b \cdot (0, -3, 0, 0, 0) + 2d \cdot (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)}_{=:u_3 \in U_3}\end{aligned}$$

Wir finden also für beliebiges $(a, b, c, d, e) \in V$ schon $u_1 \in U_1, u_3 \in U_3$ so, dass $(a, b, c, d, e) = u_1 + u_3$ ist, also ist $V \subseteq U_1 + U_3$ und damit ist $V = U_1 + U_3$. Wir wissen, dass $\dim_K(U_1) = 2$ ist. Es ist $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, -3, 0, 0, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)\}$ linear unabhängig, also eine K-Basis für U_3 und damit ist $\dim_K(U_3) = |\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, -3, 0, 0, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)\}| = 3$. Also ist

$$\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) = 2 + 3 = 5 = \dim_K(V)$$

und mit Lemma 3.20 ist dann schon $V = U_1 \oplus U_2$.

d) Wir wissen aus a), dass $\{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\} =: B$ eine K-Basis von U_1 und wir wissen aus c), dass $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, -3, 0, 0, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)\} =: C$ eine K-basis von U_3 ist. Damit erzeugt $B \cup C$ schon ganz V, da $U_1 \oplus U_2 = V$ ist. Da $|B \cup C| = 5 = \dim_K(V)$ ist, ist damit $B \cup C$ eine K-Basis von V.

3. Aufgabe: (*lineare Fortsetzung*)

Seien $K := \mathbb{R}, V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$ und sei $B := \{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 3)\}$ eine Basis von V. Sei die Abbildung $\beta \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von B wie folgt:

$$\begin{aligned}(2, 1, 0)^\beta &:= (1, 0)\\ (0, 0, 1)^\beta &:= (0, 3)\\ (-1, 0, 3)^\beta &:= (-1, 9).\end{aligned}$$

a) Beschreibe, wie ein beliebiger Vektor $v \in V$ unter β abgebildet wird!

b) Berechne die Bilder von $(1, 1, 0), (3, 0, 1)$ und $(4, 7, -3)$ unter β!

Lösung:
Voraussetzung: Seien $K := \mathbb{R}, V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$ und sei $B := \{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 3)\}$ eine Basis von V. Sei die Abbildung $\beta \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von B wie folgt:

$$\begin{aligned}(2, 1, 0)^\beta &:= (1, 0)\\ (0, 0, 1)^\beta &:= (0, 3)\\ (-1, 0, 3)^\beta &:= (-1, 9).\end{aligned}$$

a) Sei $v \in V$ ein beliebieger Vektor. Dann existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ so, dass

$$v = \lambda_1 \cdot (2, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (-1, 03)$$

ist, weil B eine K-Basis von V ist. Um v nun unter β abzubilden, benutzen wir die Homomorphieeigenschaft von β:

$$\begin{aligned} v^\beta &= (\lambda_1 \cdot (2,1,0) + \lambda_2 \cdot (0,0,1) + \lambda_3 \cdot (-1,03))^\beta \\ &= \lambda_1 \cdot (2,1,0)^\beta + \lambda_2 \cdot (0,0,1)^\beta + \lambda_3 \cdot (-1,03)^\beta \\ &= \lambda_1 \cdot (1,0) + \lambda_2 \cdot (0,3) + \lambda_3 \cdot (-1,9). \end{aligned}$$

So können wir jeden beliebigen Vektor $v \in V$ mit β abbilden. (Alternativ kann man hier auch nach einer konkreten Abbildungsvorschrift suchen. Diese ist dann f.a. $(a,b,c) \in V$ wie folgt: $(a,b,c)^\beta := (a-b, 3c)$.)

b) Es sind:

$$\begin{aligned} (1,1,0)^\beta &= (1 \cdot (2,1,0) + (-3) \cdot (0,0,1) + 1 \cdot (-1,0,3))^\beta \\ &= 1 \cdot (1,0) + (-3) \cdot (0,3) + 1 \cdot (-1,9) \\ &= (0,0) \\ (3,0,1)^\beta &= (0 \cdot (2,1,0) + 10 \cdot (0,0,1) + (-3) \cdot (-1,0,3))^\beta \\ &= 0 \cdot (1,0) + 10 \cdot (0,3) + (-3) \cdot (-1,9) \\ &= (3,3) \\ (4,7,-3)^\beta &= (7 \cdot (2,1,0) + 27 \cdot (0,0,1) + (-10) \cdot (-1,0,3))^\beta \\ &= 7 \cdot (1,0) + 27 \cdot (0,3) + (-10) \cdot (-1,9) \\ &= (17,-9) \end{aligned}$$

4. Aufgabe: (*Abbildungsmatrix*)

Sei $K := \mathbb{R}$ und seien $V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$. Sei $\varphi \in Hom_K(V,W)$ definiert wie folgt: für alle $(a,b,c) \in V$ sei $(a,b,c)^\varphi := (a+c, 2(a+b))$.

a) Schreibe Bild(φ) als Erzeugnis!

b) Stelle φ als Abbildungsmatrix $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$ bezüglich geeigneter geordneter Basen dar!

c) Erkläre an einem selbstgewählten Beispiel, wie man aus $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$ die Bilder von konkreten Vektoren berechnen kann!

Lösung:
Voraussetzung: Sei $K := \mathbb{R}$ und seien $V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$. Sei $\varphi \in Hom_K(V,W)$ definiert wie folgt: für alle $(a,b,c) \in V$ sei $(a,b,c)^\varphi := (a+c, 2(a+b))$.

a) Bild(φ) $= \langle (1,2), (0,1) \rangle_K$ (z.B.)

b) Seien $\hat{B}$ die geordenete Standardbasis von V und $\hat{C}$ die geordenete Standardbasis von W. Es sind

$$\begin{aligned} (1,0,0)^\varphi &= (1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1) \\ (0,1,0)^\varphi &= (0,2) = 0 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1) \\ (0,0,1)^\varphi &= (1,0) = 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist $(1,1,2) \in V$. Wollen wir nun $(1,1,2)$ mithilfe von $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$ mit φ darstellen. Das geht z.B. so:
Es ist $(1,1,2) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (0,0,1)$. Wie die drei Basisvektoren abgebildet werden, sagt uns die Abbildungsmatrix. Daraus können wir das Bild für $(1,1,2)$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}(1,1,2)^\varphi &= (1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (0,0,1))^\varphi \\ &= 1 \cdot (1,0,0)^\varphi + 1 \cdot (0,1,0)^\varphi + 2 \cdot (0,0,1)^\varphi \\ &= 1 \cdot (1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)) + 1 \cdot (0 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)) + 2 \cdot (1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1)) \\ &= (3,4).\end{aligned}$$

5. Aufgabe : (*Abbildungsmatrix*)

Matrix-Sudoku! Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & 2 \\ 0 & -3 & \end{pmatrix}$$

Interpretiere A als Abbildungsmatrix bezüglich der geordneten Standardbasis und ergänze so, dass ...

a) die Dimension des Bildes gleich 2 ist!

b) im Kern nur der Nullvektor liegt!

Lösung:

a) *Voraussetzung:* (z.B.) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

die Abbildungsmatrix eines Endomorphismus Abbildung α bezüglich der geordneten Standardbasis.
Behauptung: Es ist $\dim_K(\text{Bild}(\alpha)) = 2$.
Beweis: Mit Lemma 5.14 ist $\dim_K(\text{Bild}(\alpha)) = Rg(A)$. Wir betrachten die Spaltenvektoren von A. Der zweite und dritte Spaltenvektor sind gleich (beide $(0,2,-3)$), und damit linear Abhängig. es sind aber $(1,0,0), (0,2,-3)$ linear unabhängig. Es ist also $\{(1,0,0), (0,2,-3)\}$ eine Basis des Spaltenraumes, die Dimension des Spaltenraums ist also 2. Der Rang von A ist also höchstens 2. Nun betrachten wir den Zeilenraum: Es sind $(1,0,0)$ und $(0,2,2)$ linear unabhängig, die Dimension ist also mindestens 2. Insgesamt ist damit $Rg(A) = 2$, also ist $\dim_K(\text{Bild}(\alpha)) = 2$.

b) *Voraussetzung:* (z.B.) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

die Abbildungsmatrix eines Endomorphismus Abbildung α bezüglich der geordneten Standardbasis.
Behauptung: In $\text{Kern}(\alpha)$ liegt nur der Nullvektor.
Beweis: Mit Lemma 5.14 ist $\dim_K(\text{Bild}(\alpha)) = Rg(A)$. Sei nun V ein Vektorraum so, dass $\alpha : V \mapsto V$ ist. Da es sich um eine 3×3 Matrix handelt, sehen wir, dass $\dim_K(V) = 3$ sein muss. Es sind sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenvektoren linear unabhängig, also ist $3 = Rg(A) = \dim_K(\text{Bild}(\alpha))$. Mit Satz 4.8 ist dann schon

$$3 = \dim_K(V) = \dim_K(\text{Bild}(\alpha)) + \dim_K(\text{Kern}(\alpha)) = 3 + \dim_K(\text{Kern}(\alpha)) \Rightarrow \dim_K(\text{Kern}(\alpha)) = 0$$

und damit liegt im Kern von α nur der Nullvektor.

6. Aufgabe : (*Abbildungsmatrix*)

Matrix-Sudoku die Zweite! Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Interpretiere A als Abbildungsmatrix bezüglich der geordneten Standardbasis für $\mathbb{R}^3$. Ist es möglich die Matrix so zu vervollständigen, dass der Vektor $(1, 1, 1)$ das Bild $(-1, -1, -1)$ hat und der Vektor $(-1, 0, -1)$ das Bild $(1, 0, 2)$?

Lösung:

Voraussetzung: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & c & 1 \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

die Abbildungsmatrix einer Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ bezüglich der geordneten Standardbasis für $\mathbb{R}^3$.

Behauptung: Es gibt keine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $(1, 1, 1)$ das Bild $(-1, -1, -1)$ hat und der Vektor $(-1, 0, -1)$ das Bild $(1, 0, 2)$.

Beweis: Angenommen es existeren $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $(-1, 0, -1)^\alpha = (1, 0, 2)$ ist. Dann wäre

$$\begin{aligned} (1, 0, 2) &= (-1, 0, -1)^\alpha \\ &= (-1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 1))^\alpha \\ &= (-1) \cdot (1, 0, 0)^\alpha + (-1) \cdot (0, 0, 1)^\alpha \\ &= (-1) \cdot (1 \cdot (1, 0, 0) + a \cdot (0, 1, 0)) + (-1) \cdot (1 \cdot (0, 1, 0) + d \cdot (0, 0, 1)) \\ &= (-1, -a - 1, -d). \end{aligned}$$

In der ersten Komponente sehen wir nun $1 = -1$ und das ist ein Widerspruch. Also existieren keine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $(1, 1, 1)$ das Bild $(-1, -1, -1)$ hat und der Vektor $(-1, 0, -1)$ das Bild $(1, 0, 2)$.

7. Aufgabe : (*Abbildungsmatrix, lineare Fortsetzung*)

Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 4$. Seien weiter $\lambda, \delta \in K$ fest sowie $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine K-Basis von V. Sei $\alpha : B \mapsto V$ gegeben wie folgt: für alle $v \in B$ sei $v^\alpha := \lambda \cdot v + \delta \cdot b_1$. Sei $\tilde{\alpha} \in Hom_K(V, V)$ die K-lineare Fortsetzung von α.

a) Stelle $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B})$ auf!

b) Ermittle aus $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B})$ die Dimension des Bildes und des Kerns von $\tilde{\alpha}$! Ist $\tilde{\alpha}$ bijektiv?

Lösung:

Voraussetzung: Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 4$. Seien weiter $\lambda, \delta \in K$ fest sowie $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine K-Basis von V. Sei $\alpha : B \mapsto V$ gegeben wie folgt: für alle $v \in B$ sei $v^\alpha := \lambda \cdot v + \delta \cdot b_1$. Sei $\tilde{\alpha} \in Hom_K(V, V)$ die K-lineare Fortsetzung von α.

a) Auf den Basisvektoren wirkt $\tilde{\alpha}$ genau wie α. Es sind

$$\begin{aligned} b_1^{\tilde{\alpha}} &= \lambda b_1 + \delta b_1 = (\lambda + \delta) b_1 + 0 b_2 + 0 b_3 + 0 b_4 \\ b_2^{\tilde{\alpha}} &= \lambda b_2 + \delta b_1 = \delta b_1 + \lambda b_2 + 0 b_3 + 0 b_4 \\ b_3^{\tilde{\alpha}} &= \lambda b_3 + \delta b_1 = \delta b_1 + 0 b_2 + \lambda b_3 + 0 b_4 \\ b_4^{\tilde{\alpha}} &= \lambda b_4 + \delta b_1 = \delta b_1 + 0 b_2 + 0 b_3 + \lambda b_4. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Abbildungsmatrix

$$M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} \lambda + \delta & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \lambda & 0 & 0 \\ \delta & 0 & \lambda & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

b) *Behauptung:* Für $\lambda \neq 0_K$ ist $(\dim_K \mathrm{Kern}(\alpha)) = 0$ und $\tilde{\alpha}$ ist bijektiv. Für $\lambda = 0_K$ ist $(\dim_K \mathrm{Kern}(\alpha)) = 3$ und $\tilde{\alpha}$ ist nicht bijektiv.
Beweis: Aus Aufgabe a) kennen wir $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B}) =: A$. Sei nun zuerst $\lambda \neq 0_K$. Wir sehen, dass A eine untere Dreiecksmatrix ist und können so schnell $Rg(A) = 4$ ermitteln. Mit Lemma 5.14 ist nun $4 = Rg(A) = \dim_K(\mathrm{Bild}(\tilde{\alpha}))$ und mit Satz 4.8 folgt dann schon

$$4 = \dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Bild}(\tilde{\alpha})) + \dim_K(\mathrm{Kern}(\tilde{\alpha})) = 4 + \dim_K(\mathrm{Kern}(\tilde{\alpha})) \Rightarrow \dim_K(\mathrm{Kern}(\tilde{\alpha})) = 0.$$

Mit Lemma 2.25 ist $\tilde{\alpha}$ dann injektiv und mit Korollar 4.9 ist $\tilde{\alpha}$ auch surjektiv, also insgesamt bijektiv.
Sei nun $\lambda = 0_K$. Dann ist

$$M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass unter $\tilde{\alpha}$ dann $b_1^{\tilde{\alpha}} = \delta b_1 = b_2^{\tilde{\alpha}}$ ist. Da aber $b_1 \neq b_2$ ist, weil beide in B sind und B eine K-Basis ist, ist $\tilde{\alpha}$ somit nicht injektiv und insgesamt nicht bijektiv. (Alternativ wieder mit Dimension von Kern und Bild.)